Быстрое преобразование Фурье

Дискретный анализ 2012/13

Андрей Калинин, Татьяна Романова

2 марта 2013 г.

Раздел

Литература

- Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание, М.:Вильямс, 2005, стр. 926-953, глава 30, «Полиномы и быстрое преобразование Фурье»

Полином

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

- $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ — коэффициенты.
- Степень k, если $a_k \neq 0$ и $\forall j > k \Rightarrow a_j = 0$.
- Граница степени $n > k$.

Операции над полиномами

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j, \qquad B(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$$

$$C(x) = A(x) + B(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (a_j + b_j) x^j = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$$

$$C(x) = A(x) \times B(x) = \sum_{j=0}^{2n-2} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) x^j = \sum_{j=0}^{2n-2} c_j x^j$$

Вектор коэффициентов умножения, $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{2n-2})$ называется свёрткой векторов a и b: $a \otimes b$.

Раздел

Представление, основанное на коэффицентах

- Полином $A(x)$ степени не выше n представляется вектором коэффициентов:

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

- Операция вычисления полинома $A(x)$ в x_0 по схеме Горнера требует $\Theta(n)$ времени:

$$A(x_0) = ((\cdots((a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + \cdots + a_2)x_0 + a_1)x_0 + a_0$$

- Сложение полиномов a и $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ занимает время $\Theta(n)$:

$$c = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_{n-1} + b_{n-1})$$

- Умножение наивным способом занимает $\Theta(n^2)$ времени.

Представление, основанное на значениях в точках

Множество из n пар точка-значение:

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}, \qquad x_i \neq x_j \quad (i \neq j),$$

$y_k = A(x_k), k = 0, 1, \dots, n-1.$

- Возможно бесконечное число различных «точечных» представлений полинома, т.к. можно использовать в качестве базиса любые n различных точек.
- Получение по вектору коэффициентов точечного представления — аппроксимация. По схеме Горнера выполняется за $\Theta(n^2)$ времени. Можно ускорить до $\Theta(n \lg n)$
- Определение коэффициентов полинома по точечному представлению — интерполяция.

Единственность интерполяционного полинома

Теорема

Для любого множества, состоящего из n пар точка-значение $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\}$, таких что все значения x_k различны, существует единственный полином $A(x)$ с границей степени n, такой что $y_k = A(x_k)$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Матрица в левой части — матрица Вандермонда, $V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$:

$$\det V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \le j < k \le n-1} (x_k - x_j)$$

следовательно, она обратима если все x_k различны, т.е. можно однозначно решить уравнение:

$$a = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^{-1} y$$

$\square$

Формула Лагранжа

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k}(x - x_j)}{\prod_{j \neq k}(x_k - x_j)}$$

Тем самым, можно вычислить коэффциенты полинома A за время $\Theta(n^2)$

Операции над полиномами в точечном представлении

$$A = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})\},$$
$$B = \{(x_0, y'_0), (x_1, y'_1), \ldots, (x_{n-1}, y'_{n-1})\},$$

- Сложение:

$$\{(x_0, y_0 + y'_0), (x_1, y_1 + y'_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1} + y'_{n-1})\}$$

- Умножение требует доопределения значений полиномов до $2n$ точек, тогда:

$$\{(x_0, y_0 y'_0), (x_1, y_1 y'_1), \ldots, (x_{2n-1}, y_{2n-1} y'_{2n-1})\}$$

Быстрое умножение полиномов в коэффициентах

- Наивное перемножение, $\Theta(n^2)$.
- Перевод в точечную форму и перемножение там:
  1. Удвоение границы степени.
  2. Аппроксимация, $\Theta(n \lg n)$, дискретное преобразование Фурье (ДПФ, DFT), в качестве точек выбираются корни мнимой единицы степени $2n$: ω_{2n}. Используется метод быстрого преобразования Фурье (БПФ).
  3. Перемножение, $\Theta(n)$.
  4. Интерполяция, $\Theta(n \lg n)$, вычисление обратного ДПФ.

Теорема

Произведение двух полиномов степенью не выше n, представленных в коэффициентной форме, можно вычислить за время $\Theta(n \lg n)$.

Раздел

Комплексные корни из единицы

Комплексный корень n-й степени из единицы число ω_n, такое, что

$$\omega_n^n = 1$$

Существует ровно n комлексных корней n-й степени из 1:

$$\omega_{n,k} = e^{2\pi ik/n}$$

При этом значение

$$\omega_n = e^{2\pi i/n}$$

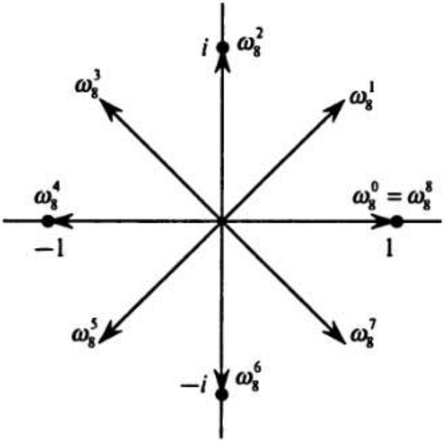
называется главным значением корня n-й степени из единицы; тогда все корни:

$$\omega_n^0, \omega_n^1, \dots, \omega_n^{n-1}$$

образуют группу относительно операции умножения:

$$\omega_n^j \omega_n^k = \omega_n^{(j+k) \mod n}, \qquad \omega_n^{-1} = \omega_n^{n-1}$$

Расположение мнимых корней из единицы на комплексной плоскости



$$e^{iu} = \cos(u) + i\sin(u)$$

$$\omega_8 = e^{2\pi i/8}$$

Лемма о сокращении

Теорема

Для любых целых чисел $n \geq 0$, $k \geq 0$ *и* $d > 0$

$$\omega_{dn}^{dk} = \omega_n^k$$

Доказательство.

$$\omega_{dn}^{dk} = \left(e^{2\pi i/dn}\right)^{dk} = \left(e^{2\pi i/n}\right)^{k} = \omega_n^k$$

□

Для любого чётного целого $n > 0$

$$\omega_n^{n/2} = \omega_2 = -1$$

Лемма о делении пополам

Теорема

Если $n > 0$ чётное, то квадраты комплексных корней n-й степени из единицы представляют собой $n/2$ корней $n/2$-ой степени из единицы.

Доказательство.

$$(\omega_n^k)^2 = \omega_{n/2}^k$$

$$(\omega_n^{k+n/2})^2 = \omega_n^{2k+n} = \omega_n^{2k}\omega_n^n = \omega_n^{2k} = \left(\omega_n^k\right)^2$$

Т.е., квадраты ω_n^k и $\omega_n^{k+n/2}$ одинаковы. $\square$

Лемма о суммировании

Теорема

Для любого целого $n \geq 1$ и ненулевого целого k, не кратного n,

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = 0$$

Доказательство.

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\omega_n^k\right)^j = \frac{(\omega_n^k)^n - 1}{\omega_n^k - 1} = \frac{(\omega_n^n)^k - 1}{\omega_n^k - 1} = \frac{1^k - 1}{\omega_n^k - 1} = 0$$

□

Дискретное преобразование Фурье

Полином

$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$$

задан в коэффициентной форме $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Нужно вычислить значения y_k в точках $\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}$:

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \omega_n^{kj}$$

Вектор $y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ представляет собой дискретное преобразование Фурье вектора a:

$$y = \mathrm{DFT}_n(a)$$

Далее будем предполагать, что $n = 2^k$ для некоторого k. Если это не так, то несложно добавить нулевых старших коэффициентов.

Раздел

Полиномы и быстрое преобразование Фурье

- Представление полиномов
- Дискретное преобразование Фурье
- Быстрое преобразование Фурье

Идея БПФ

Воспользуемся доказанными свойствами мнимых корней из единицы:

$$A^{[0]}(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n/2-1},$$
$$A^{[1]}(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n/2-1}$$

Тогда задачу вычисления $A(x)$ в точках $\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}$ можно свести к:

1. Вычислить $A^{[0]}(x)$ и $A^{[1]}(x)$ степени не выше $n/2$ в точках $(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \ldots, (\omega_n^{n-1})^2$
2. Объединить результаты

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

Идея БПФ

Воспользуемся доказанными свойствами мнимых корней из единицы:

$$A^{[0]}(x) = a_0 + a_2 x + a_4 x^2 + \cdots + a_{n-2} x^{n/2-1},$$
$$A^{[1]}(x) = a_1 + a_3 x + a_5 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n/2-1}$$

Тогда задачу вычисления $A(x)$ в точках $\omega_n^0, \omega_n^1, \ldots, \omega_n^{n-1}$ можно свести к:

1. Вычислить $A^{[0]}(x)$ и $A^{[1]}(x)$ степени не выше $n/2$ в точках $(\omega_n^0)^2, (\omega_n^1)^2, \ldots, (\omega_n^{n-1})^2$
2. Объединить результаты

$$A(x) = A^{[0]}(x^2) + xA^{[1]}(x^2)$$

Тем самым задача вычисления DFT_n сведена к вычислению двух задач $\mathrm{DFT}_{n/2}$.

Рекурсивный БПФ

$\textsc{Recursive-FFT}(a)$

$n \leftarrow \mathit{length}[a]$
if $n = 1$
    return a
$\omega_n \leftarrow e^{2\pi i/n}$
$\omega \leftarrow 1$
$a^{[0]} \leftarrow (a_0, a_2, \ldots, a_{n-2})$
$a^{[1]} \leftarrow (a_1, a_3, \ldots, a_{n-1})$
$y^{[0]} \leftarrow \textsc{Recursive-FFT}(a^{[0]})$
$y^{[1]} \leftarrow \textsc{Recursive-FFT}(a^{[1]})$
for $k \leftarrow 0$ **to** $n/2 - 1$
    $y_k \leftarrow y_k^{[0]} + \omega y_k^{[1]}$
    $y_{k+(n/2)} \leftarrow y_k^{[0]} - \omega y_k^{[1]}$
    $\omega \leftarrow \omega\omega_n$
return y

Обоснование

1. Для значений $y_0, y_1, \ldots, y_{n/2-1}$:

$$\begin{aligned} y_k &= y_k^{[0]} + \omega_n^k y_k^{[1]} = A^{[0]}(\omega_{n/2}^k) + \omega_n^k A^{[1]}(\omega_{n/2}^k) = \\ &= A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^k A^{[1]}(\omega_n^{2k}) = A(\omega_n^k). \end{aligned}$$

2. Для $y_{n/2}, y_{n/2+1}, \ldots, y_{n-1}$ и $k = 0, 1, \ldots, n/2-1$:

$$\begin{aligned} y_{k+(n/2)} &= y_k^{[0]} - \omega_n^k y_k^{[1]} = y_k^{[0]} + \omega_n^{k+(n/2)} y_k^{[1]} = \\ &= A^{[0]}(\omega_n^{2k}) + \omega_n^{k+(n/2)} A^{[1]}(\omega_n^{2k}) = \\ &= A^{[0]}(\omega_n^{2k+n}) + \omega_n^{k+(n/2)} A^{[1]}(\omega_n^{2k+n}) = \\ &= A(\omega_n^{k+(n/2)}). \end{aligned}$$

Время работы Recursive-FFT

1. Собственное время работы $\Theta(n)$, где n — длина исходного вектора.
2. Реккурентное соотношение времени работы:

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) = \Theta(n \lg n)$$

Интерполяция во мнимых корнях из единицы

ДПФ можно представить как $y = V_n a$ где V_n — матрица Вандермонда по степеням ω_n:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \dots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Интерполяция во мнимых корнях из единицы

ДПФ можно представить как $y = V_n a$ где V_n — матрица Вандермонда по степеням ω_n:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & \omega_n^2 & \dots & \omega_n^{n-1} \\ 1 & \omega_n^2 & \omega_n^4 & \dots & \omega_n^{2(n-1)} \\ 1 & \omega_n^3 & \omega_n^6 & \dots & \omega_n^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_n^{n-1} & \omega_n^{2(n-1)} & \dots & \omega_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Тогда для выполнения обратной операции $a = \mathrm{DFT}^{-1}(y)$ нужно вычислить V_n^{-1}: $a = V_n^{-1} y$

Теорема

Для $j, k = 0, 1, \ldots, n-1$ (j,k)*-й элемент матрицы* V_n^{-1} *равен* ω_n^{-kj}/n

Доказательство.

Покажем, что в этом случае $V_n^{-1}V_n = I_n$, единичной матрице размером $n \times n$. Рассмотрим (j, j')-й элемент матрицы $V_n^{-1}V_n$:

$$[V_n^{-1}V_n]_{jj'} = \sum_{k=0}^{n-1}(\omega_n^{-kj}/n)(\omega_n^{kj'}) = \sum_{k=0}^{n-1}\omega_n^{k(j'-j)}/n$$

По лемме о суммировании эта сумма равна 1, если $j' = j$ и 0 в противном случае. Т.к.

$$-(n-1) \leq j' - j \leq n-1$$

то $j' - j$ не кратно n, т.е. лемма применима. $\square$

Обратное ДПФ

Если дана обратная матрица V_n^{-1}, то $\mathrm{DFT}_n^{-1}(y)$ вычисляется по формуле:

$$a_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Обратное ДПФ

Если дана обратная матрица V_n^{-1}, то $\mathrm{DFT}_n^{-1}(y)$ вычисляется по формуле:

$$a_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k \omega_n^{-kj}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

Алгоритм вычисления аналогичен Recursive-FFT с небольшими изменениями:

1. Поменять ролями a и y.
2. Заменить ω_n на ω_n^{-1}.
3. Разделить каждый элемент результата на n.

Теорема о свёртке

Тем самым, с помощью прямого и обратного БПФ можно преобразовать полином степени не выше n из коэффициентой формы в форму значений в точках и обратно за время $\Theta(n \lg n)$. А так же:

Теорема

Для любых двух векторов a и b длины n, где n является степенью 2, справедливо соотношение:

$$a \otimes b = \mathrm{DFT}_{2n}^{-1}(\mathrm{DFT}_{2n}(a) \cdot \mathrm{DFT}_{2n}(b))$$

где векторы a и b дополняются нулями до длины $2n$, а «·» обозначает покомпонентное произведение двух $2n$-элементных векторов.